Matrice d'une application linéaire

Corrections d'Arnaud Bodin.

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i}+\vec{j})$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B}'$ est la base $(\vec{i}-\vec{j}, -2\vec{i}+3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$. Même question avec $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001087]

Exercice 2

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application ϕ.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Correction ▼ Vidéo ■ [001097]

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Correction ▼ Vidéo ■ [002433]

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ & & ⋰ & & \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001101]

Exercice 5

Soient A,B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $B=P^{-1}AP$). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si $A=\lambda I$, alors $A=B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002444]

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'=(e_1,e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.
3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n\in\mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+\frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1}=-\frac{5}{2}x_n-\frac{2}{3}y_n \end{cases}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001104]

Exercice 7

Soit a et b deux réels et A la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A)\geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A)=2$?

Correction ▼ Vidéo ■ [002774]

Exercice 8

Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.

Correction ▼ Vidéo ■ [001099]

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2=f$.

1. Montrer que $E=\mathrm{Ker}\, f\oplus\mathrm{Im}\, f$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n. Posons $r=\dim\mathrm{Im}\, f$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que : $f(e_i)=e_i$ si $i\leqslant r$ et $f(e_i)=0$ si $i>r$. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathscr{B}$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001093]

Exercice 10

Trouver toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2=0$;
2. $M^2=M$;

3. $M^2 = I$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002475]

Exercice 11

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \dots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leur dimension respective.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Correction ▼ Vidéo ■ [001094]

Exercice 12

Pour toute matrice carrée A de dimension n, on appelle trace de A, et l'on note $\operatorname{tr} A$, la somme des éléments diagonaux de A :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, M sa matrice par rapport à une base e, M' sa matrice par rapport à une base e', alors $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M'$. On note $\operatorname{tr} f$ la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si g est un autre endomorphisme de E, $\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

Correction ▼ Vidéo ■ [002442]

Indication pour l'exercice 1 ▲

f est l'application qui à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

A est *idempotente* s'il existe un n tel que $A^n = I$ (la matrice identité).
A est *nilpotente* s'il existe un n tel que $A^n = (0)$ (la matrice nulle).

Indication pour l'exercice 10 ▲

Il faut trouver les propriétés de l'application linéaire f associée à chacune de ces matrices. Les résultats s'expriment en explicitant une (ou plusieurs) matrice M' qui est la matrice de f dans une base bien choisie et ensuite en montrant que toutes les autres matrices sont de la forme $M = P^{-1}M'P$.
Plus en détails pour chacun des cas :

1. $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et discuter suivant la dimension du noyau.
2. Utiliser l'exercice 9 : $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et il existe une base telle que $f(e_i) = 0$ ou $f(e_i) = e_i$.
3. Poser $N = \frac{I+M}{2}$ (et donc $M = \cdots$) chercher à quelle condition $M^2 = I$.

Correction de l'exercice 1 ▲

L'expression de f dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante $f(x,y)=(x-y,0)$. Autrement dit à un vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ on associe le vecteur $\begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix}$. On note que f est bien une application linéaire. Cette expression nous permet de calculer les matrices demandées.

Remarque : comme $\mathcal{B}$ est la base canonique on note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pour $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ qui est le vecteur $x\vec{i}+y\vec{j}$.

1. Calcul de $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$. Comme $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j})$, la matrice s'obtient en calculant $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$:
$$f(\vec{i})=f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{i}\quad f(\vec{j})=f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-\vec{i}$$
donc
$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

2. On garde la même application linéaire mais la base de départ change (la base d'arrivée reste $\mathcal{B}$). Si on note $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}$, on a $\mathcal{B}'=(\vec{i}-\vec{j},-2\vec{i}+3\vec{j})=(\vec{u},\vec{v})$. On exprime $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}$.
$$f(\vec{u})=f(\vec{i}-\vec{j})=f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\qquad f(\vec{v})=f(-2\vec{i}+3\vec{j})=f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$$
donc
$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})=\begin{pmatrix}2&-5\\0&0\end{pmatrix}$$

3. Toujours avec le même f on prend $\mathcal{B}'$ comme base de départ et d'arrivée, il s'agit donc d'exprimer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}'=(\vec{u},\vec{v})$. Nous venons de calculer que
$$f(\vec{u})=f(\vec{i}-\vec{j})=f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=2\vec{i}\quad f(\vec{v})=f(2\vec{i}+3\vec{j})=f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}=-5\vec{i}$$
Mais il nous faut obtenir une expression en fonction de la base $\mathcal{B}'$. Remarquons que
$$\left\{\begin{array}{rcl}\vec{u}&=&\vec{i}-\vec{j}\\\vec{v}&=&-2\vec{i}+3\vec{j}\end{array}\right.\implies\left\{\begin{array}{rcl}\vec{i}&=&3\vec{u}+\vec{v}\\\vec{j}&=&2\vec{u}+\vec{v}\end{array}\right.$$
Donc
$$f(\vec{u})=f(\vec{i}-\vec{j})=2\vec{i}=6\vec{u}+2\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\qquad f(\vec{v})=f(-2\vec{i}+3\vec{j})=-5\vec{i}=-15\vec{u}-5\vec{v}=\begin{pmatrix}-15\\-5\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$
Donc
$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}6&-15\\2&-5\end{pmatrix}$$
Remarque : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ désigne le vecteur $x\vec{u}+y\vec{v}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On note la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}=xe_1+ye_2+ze_3$. La matrice $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est composée des vecteurs colonnes $\phi(e_i)$, on sait
$$\phi(e_1)=e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\qquad\phi(e_2)=-e_1+e_2+e_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\qquad\phi(e_3)=e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\text{donc} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le noyau de ϕ (ou celui de A) est l'ensemble de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$.

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} \phi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3)$. Le noyau est donc de dimension 1.

2. On applique le pivot de Gauss comme si c'était un système linéaire :

$$\begin{cases} e_1 \quad\quad - e_3 = f_1 & L_1 \\ e_1 - e_2 \quad\quad = f_2 & L_2 \\ -e_1 + e_2 + e_3 = f_3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 \quad\quad - e_3 = f_1 & \\ \quad - e_2 + e_3 = f_2 - f_1 & L_2 - L_1 \\ \quad e_2 \quad\quad = f_3 + f_1 & L_3 + L_1 \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} e_1 & = & f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 & = & f_1 + f_3 \\ e_3 & = & f_2 + f_3 \end{cases}$$

Donc tous les vecteurs de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ s'expriment en fonction de (f_1, f_2, f_3), ainsi la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice. Comme elle a exactement 3 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 alors $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base.

3.

$$\phi(f_1) = \phi(e_1 - e_3) = \phi(e_1) - \phi(e_3) = e_3 - e_3 = 0$$

$$\phi(f_2) = \phi(e_1 - e_2) = \phi(e_1) - \phi(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$$

$$\phi(f_3) = \phi(-e_1 + e_2 + e_3) = -\phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 = f_3$$

Donc, dans la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, nous avons

$$\phi(f_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \qquad \phi(f_2) = f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \qquad \phi(f_3) = f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

Donc la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ϕ est la projection sur $\operatorname{Vect}(f_2, f_3)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(f_1)$ (autrement dit c'est la projection sur le plan d'équation $(x' = 0)$, parallèlement à l'axe des x', ceci dans la base $\mathscr{B}'$).

4. P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. En effet la matrice de passage contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$.
Si un vecteur a pour coordonnées X dans la base $\mathscr{B}$ et X' dans la base $\mathscr{B}'$ alors $PX' = X$ (attention à l'ordre). Et si A est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ et B est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$ alors
$$B = P^{-1}AP$$
(Une matrice de passage entre deux bases est inversible.)
Ici on calcule l'inverse de P :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On retrouve donc bien les mêmes résultats que précédemment.

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons l'ancienne base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et ce qui sera la nouvelle base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit P la matrice de passage qui contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
On vérifie que P est inversible (on va même calculer son inverse) donc $\mathscr{B}'$ est bien une base. De plus
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on calcule } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
B est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Nous associons à la matrice A son application linéaire naturelle f. Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors $f(e_1)$ est donné par le premier vecteur colonne, $f(e_2)$ par le deuxième, etc. Donc ici
$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n, \; f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{n-1}, \ldots \qquad \text{et en général } f(e_i) = e_{n+1-i}$$
Calculons ce que vaut la composition $f \circ f$. Comme une application linéaire est déterminée par les images des éléments d'une base alors on calcule $f \circ f(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$ en appliquant deux fois la formule précédente :
$$f \circ f(e_i) = f\big(f(e_i)\big) = f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i$$
Comme $f \circ f$ laisse invariant tous les vecteurs de la base alors $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc $f \circ f = \mathrm{id}$. On en déduit $f^{-1} = f$ et que la composition itérée vérifie $f^p = \mathrm{id}$ si p est pair et $f^p = f$ si p est impair. Conclusion : $A^p = I$ si p est pair et $A^p = A$ si p est impair.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit A, B tel que $B = P^{-1}AP$.

1. Supposons A inversible, alors il existe A' tel que $A\times A'=I$ et $A'\times A=I$. Notons alors $B'=P^{-1}A'P$. On a
$$B\times B'=\left(P^{-1}AP\right)\times\left(P^{-1}A'P\right)=P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)A'P=P^{-1}AA'P=P^{-1}IP=I$$
De même $B'\times B=I$. Donc B est inversible d'inverse B'.
2. Supposons que $A^n=I$. Alors
$$\begin{array}{rcl} B^n &=& \left(P^{-1}AP\right)^n=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)\\ &=& P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots AP\\ &=& P^{-1}A^nP\\ &=& P^{-1}IP=I \end{array}$$
Donc B est idempotente.
3. Si $A^n=(0)$ alors le même calcul qu'au-dessus conduit à $B^n=(0)$.
4. Si $A=\lambda I$ alors $B=P^{-1}(\lambda I)P=\lambda I\times P^{-1}P=\lambda I$ (car la matrice λI commute avec toutes les matrices).

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}=\big((1,0),(0,1)\big)$ vers (ce qui va être) la base $\mathscr{B}'=(e_1,e_2)$. C'est la matrice composée des vecteurs colonnes e_1 et e_2 :
$$P=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}$$
$\det P=-4\neq 0$ donc P est inversible et ainsi $\mathscr{B}'$ est bien une base.
Alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est :
$$B=P^{-1}AP=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&2\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{2}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$
2. Il est très facile de calculer la puissance d'une matrice diagonale :
$$B^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&(\frac{1}{3})^n\end{pmatrix}$$
Comme $A=PBP^{-1}$ on va en déduire A^n :
$$A^n=\left(PBP^{-1}\right)^n=PB^nP^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10-\frac{6}{3^n}&4-\frac{4}{3^n}\\-15+\frac{15}{3^n}&-6+\frac{10}{3^n}\end{pmatrix}$$
3. Si l'on note $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ alors les équations que vérifient les suites s'écrivent en terme matriciel :
$$X_{n+1}=AX_n.$$
Si l'on note les conditions initiales $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ alors $X_n=A^nX_0$. On en déduit
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_n &=& \frac{1}{4}\Big((10-\frac{6}{3^n})x_0+(4-\frac{4}{3^n})y_0\Big)\\ y_n &=& \frac{1}{4}\Big((-15+\frac{15}{3^n})x_0+(-6+\frac{10}{3^n})y_0\Big)\end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Avant toute, un coup d'œil sur la matrice nous informe de deux choses : (a) A n'est pas la matrice nulle donc $\mathrm{rg}(A)\geqslant 1$; (b) il y a 3 lignes donc $\mathrm{rg}(A)\leqslant 3$ (le rang est plus petit que le nombre de colonnes et que le nombre de lignes).

1. Montrons de différentes façons que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Première méthode : sous-déterminant non nul.** On trouve une sous-matrice 2×2 dont le déterminant est non nul. Par exemple la sous-matrice extraite du coin en bas à gauche vérifie $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Deuxième méthode : espace vectoriel engendré par les colonnes.** On sait que l'image de l'application linéaire associée à la matrice A est engendrée par les vecteurs colonnes. Et le rang est la dimension de cette image. On trouve facilement deux colonnes linéairement indépendantes : la deuxième $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la troisième $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ colonne. Donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Troisième méthode : espaces vectoriel engendré par les lignes.** Il se trouve que la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes égal la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (car $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$). Comme les deuxième et troisième lignes sont linéairement indépendantes alors $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   Attention : les dimensions des espaces vectoriels engendrés sont égales mais les espaces sont différents !
2. En utilisant la dernière méthode : le rang est exactement 2 si la première ligne est dans le sous-espace engendré par les deux autres. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) = 2 &\iff (a,2,-1,b) \in \mathrm{Vect}\big\{(3,0,1,-4),(5,4,-1,2)\big\} \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (a,2,-1,b) = \lambda(3,0,1,-4) + \mu(5,4,-1,2) \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda+5\mu &=& a \\ 4\mu &=& 2 \\ \lambda-\mu &=& -1 \\ -4\lambda+2\mu &=& b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& -\frac{1}{2} \\ \mu &=& \frac{1}{2} \\ a &=& 1 \\ b &=& 3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Conclusion la rang de A est 2 si $(a,b) = (1,3)$. Sinon le rang de A est 3.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. (a) Commençons par des remarques élémentaires : la matrice est non nulle donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$ et comme il y a $p=4$ lignes et $n=3$ colonnes alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p) = 3$.
   (b) Ensuite on va montrer $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$ en effet le sous-déterminant 2×2 (extrait du coin en haut à gauche) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ est non nul.
   (c) Montrons que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Avec les déterminants il faudrait vérifier que pour toutes les sous-matrices 3×3 les déterminants sont nuls. Pour éviter de nombreux calculs on remarque ici que les colonnes sont liées par la relation $v_2 = v_1 + v_3$. Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.
   (d) L'application linéaire associée à la matrice A est l'application $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Et le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}\, f_A + \dim \mathrm{Im}\, f_A = \dim \mathbb{R}^3$ donne ici $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$.
   Mais la relation $v_2 = v_1 + v_3$ donne immédiatement un élément du noyau : en écrivant $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ alors $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f_A$. Et comme le noyau est de dimension 1 alors

$$\mathrm{Ker}\, f_A = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) Pour un base de l'image, qui est de dimension 2, il suffit par exemple de prendre les deux premiers vecteurs colonnes de la matrice A (ils sont clairement non colinéaires) :

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2\} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

2. On fait le même travail avec B et f_B.

(a) Matrice non nulle avec 4 lignes et 4 colonnes donc $1 \leqslant \operatorname{rg}(B) \leqslant 4$.

(b) Comme le sous-déterminant (du coin supérieur gauche) $\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 3\end{vmatrix} = -2$ est non nul alors $\operatorname{rg}(B) \geqslant 2$.

(c) Et pareil avec le sous-déterminant 3×3 :

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 3 & -1\\0 & -1 & 2\end{vmatrix} = -2$$

qui est non nul donc $\operatorname{rg}(B) \geqslant 3$.

(d) Maintenant on calcule le déterminant de la matrice B et on trouve $\det B = 0$, donc $\operatorname{rg}(B) < 4$. Conclusion $\operatorname{rg}(B) = 3$. Par le théorème du rang alors $\dim \operatorname{Ker} f_B = 1$.

(e) Cela signifie que les colonnes (et aussi les lignes) sont liées, comme il n'est pas clair de trouver la relation à la main on résout le système $BX = 0$ pour trouver cette relation ; autrement dit :

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 7\\4 & 3 & -1 & 11\\0 & -1 & 2 & -4\\3 & 3 & -2 & 11\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl}2x+2y-z+7t & = & 0\\4x+3y-z+11t & = & 0\\-y+2z-4t & = & 0\\3x+3y-2z+11t & = & 0\end{array}\right.$$

Après résolution de ce système on trouve que les solutions s'écrivent $(x,y,z,t) = (-\lambda, -2\lambda, \lambda, \lambda)$. Et ainsi

$$\operatorname{Ker} f_B = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Et pour une base de l'image il suffit, par exemple, de prendre les 3 premiers vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3 de la matrice B, car ils sont linéairement indépendants :

$$\operatorname{Im} f_B = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Nous devons montrer $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

(a) Si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ alors d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. Donc $0 = f(x) = f\big(f(x')\big) = f(x') = x$ donc $x = 0$ (on a utilisé $f \circ f = f$). Donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(b) Pour $x \in E$ on le réécrit $x = x - f(x) + f(x)$. Alors $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$ (car $f\big(x - f(x)\big) = f(x) - f \circ f(x) = 0$) et $f(x) \in \operatorname{Im} f$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Donc $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

(c) Conclusion : $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

2. Notons r le rang de f : $r = \dim \operatorname{Im} f$. Soit $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une base de $\operatorname{Im} f$ et soit $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ une base de $\operatorname{Ker} f$. Comme $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Pour $i > r$ alors $e_i \in \operatorname{Ker} f$ donc $f(e_i) = 0$.
   Comme $f \circ f = f$ alors pour n'importe quel $x \in \operatorname{Im} f$ on a $f(x) = x$: en effet comme $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$ ainsi $f(x) = f\big(f(x')\big) = f(x') = x$. En particulier si $i \leqslant r$ alors $f(e_i) = e_i$.
3. La matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc :
$$\begin{pmatrix} I & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$
   où I désigne la matrice identité de taille $r \times r$ et les (0) désignent des matrices nulles.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soit M une matrice telle que $M^2 = 0$ et soit f l'application linéaire associée à M. Comme $M^2 = 0$ alors $f \circ f = 0$. Cela entraîne $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Discutons suivant la dimension du noyau :
   (a) Si $\dim \operatorname{Ker} f = 3$ alors $f = 0$ donc $M = 0$ (la matrice nulle).
   (b) Si $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ alors prenons une base de $\mathbb{R}^3$ formée de deux vecteurs du noyau et d'un troisième vecteur. Dans cette base la matrice de f est $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ mais comme $f \circ f = 0$ alors $M'^2 = 0$; un petit calcul implique $c = 0$. Donc M et M' sont les matrices de la même application linéaire f mais exprimées dans des bases différentes, donc M et M' sont semblables.
   (c) Si $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ alors comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ on a $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 1$ mais alors cela contredit le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$. Ce cas n'est pas possible.
   (d) Conclusion : M est une matrice qui vérifie $M^2 = 0$ si et seulement si il existe une matrice inversible P et des réels a, b tels que
$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$
2. On va s'aider de l'exercice 9. Si $M^2 = M$ et f est l'application linéaire associée alors $f \circ f = f$. On a vu dans l'exercice 9 qu'alors $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et que l'on peut choisir une base (e_1, e_2, e_3) telle que $f(e_i) = e_i$ puis $f(e_i) = 0$. Suivant la dimension du noyau cela donne que la matrice M' de f dans cette base est
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Maintenant M est semblable à l'une de ces matrices : il existe P inversible telle que $M = P^{-1}M'P$ où M' est l'une des quatre matrices A_i ci-dessus.
   Géométriquement notre application est une projection (projection sur une droite pour la seconde matrice et sur un plan pour la troisième).
3. Posons $N = \frac{I+M}{2}$ et donc $M = 2N - I$. Alors $M^2 = I \iff (2N - I)^2 = I \iff 4N^2 - 4N - I = I \iff N^2 = N$. Donc par la deuxième question N est semblable à l'une des matrice A_i : $N = P^{-1}A_iP$. Donc $M = 2P^{-1}A_iP - I = P^{-1}(2A_i - I)P$. Ainsi M est semblable à l'une des matrices $2A_i - I$ suivantes :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Ce sont des matrices de symétrie (par rapport à l'origine pour la première matrice, par rapport à une droite pour la seconde matrice et par rapport à un plan pour la troisième).

L'idée de poser $N = \frac{I+M}{2}$ est la suivante : si $M^2 = I$ alors géométriquement l'application linéaire s associée à M est une *symétrie*, alors que si $N^2 = N$ alors l'application linéaire p associée est une *projection*. Et projection et symétrie sont liées par $p(x) = \frac{x+s(x)}{2}$ (faites un dessin !) c'est-à-dire $p = \frac{\mathrm{id}+s}{2}$ ou encore $N = \frac{I+M}{2}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Il est facile de voir que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ donc f est linéaire, de plus, P étant un polynôme de degré $\leqslant n$ alors $f(P)$ aussi.
2. Pour $n = 3$ on calcule l'image de chacun des éléments de la base :
$$f(1) = 1+1-2 = 0, \quad f(X) = (X+1)+(X-1)-2X = 0,$$
$$f(X^2) = (X+1)^2+(X-1)^2-2X^2 = 2, \quad f(X^3) = (X+1)^3+(X-1)^3-2X^3 = 6X.$$
Donc la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Pour le cas général on calcule
$$\begin{aligned} f(X^p) &= (X+1)^p + (X-1)^p - 2X^p \\ &= \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p \\ &= \sum_{p-k \text{ pair et } k<p} 2\binom{p}{k} X^k \end{aligned}$$
Donc la matrice est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 2\binom{p}{0} & 0 & \\ & 0 & 0 & 2\binom{3}{1} & & 0 & 2\binom{p+1}{1} & \\ & & 0 & 0 & \cdots & 2\binom{p}{2} & 0 & \\ & & & 0 & & 0 & 2\binom{p+1}{3} & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots & 0 & \\ & & & & & 0 & \vdots & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
Dans cet exemple de matrice, p est pair. Chaque colonne commence en alternant une valeur nulle/une valeur non-nulle jusqu'à l'élément diagonal (qui est nul).
3. Nous savons que $f(1) = 0$ et $f(X) = 0$ donc 1 et X sont dans le noyau $\operatorname{Ker} f$. Il est aussi clair que les colonnes de la matrices $f(X^2), \cdots, f(X^n)$ sont linéairement indépendantes (car la matrice est échelonnée). Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(X^2), f(X^3), \ldots, f(X^n)\}$ et $\dim \operatorname{Im} f = n-1$.
Par la formule du rang $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Comme nous avons déjà deux vecteurs du noyau alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{1, X\}$.
4. (a) Soit $Q \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(R) = Q$. On pose ensuite $P(X) = R(X) - R(0) - R'(0)X$. On a tout fait pour que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$. De plus par la linéarité de f et son noyau alors
$$f(P) = f\big(R(X) - R(0) - R'(0)X\big) = f\big(R(X)\big) - R(0)f(1) - R'(0)f(X) = f(R) = Q.$$
Donc notre polynôme P convient.

(b) Montrons l'unicité. Soient P et $\tilde{P}$ tels que $f(P) = f(\tilde{P}) = Q$ avec $P(0) = P'(0) = 0 = \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(0)$. Alors $f(P-\tilde{P}) = Q - Q = 0$ donc $P - \tilde{P} \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{1, X\}$. Ainsi $P - \tilde{P}$ s'écrit $P - \tilde{P} = aX + b$. Mais comme $(P-\tilde{P})(0) = 0$ alors $b = 0$, et comme $(P-\tilde{P})'(0) = 0$ alors $a = 0$. Ce qui prouve $P = \tilde{P}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Notons $C = AB$ et $D = BA$. Alors par la définition du produit de matrice :
$$c_{ij} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{donc } c_{ii} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{ki}$$
Ainsi
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} C = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_{ii} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{ki}$$
De même
$$\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr} D = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} b_{ik} a_{ki}$$
Si dans cette dernière formule on renomme l'indice i en k et l'indice k en i (ce sont des variables muettes donc on leur donne le nom qu'on veut) alors on obtient :
$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{ik} b_{ki} = \operatorname{tr}(AB)$$

2. M et M' sont semblables donc il existe une matrice de passage P telle que $M' = P^{-1}MP$ donc
$$\operatorname{tr} M' = \operatorname{tr}\big(P^{-1}(MP)\big) = \operatorname{tr}\big((MP)P^{-1}\big) = \operatorname{tr}(MI) = \operatorname{tr} M$$

3. La trace a aussi la propriété évidente que
$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$
Fixons une base de E. Notons A la matrice de f dans cette base et B la matrice de g dans cette même base. Alors AB est la matrice de $f \circ g$ et BA est la matrice de $g \circ f$. Ainsi la matrice de $f \circ g - g \circ f$ est $AB - BA$ Donc
$$\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$
